Matrizes e determinantes

Exercícios

1. A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz

a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2.
b) -1.
c) 1.
d) 2.

4. Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

5. Para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ seja $3,$ o valor de b deve ser igual a

a) 2
b) 0
c) -1
d) -2

Gabarito

1. A

Tem-se que os totais transferidos, em milhões, por cada um dos bancos foram

$$\sum_{j=1}^{5} a_{1j} = 0+2+0+2+2 = 6,$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{2j} = 0+0+2+1+0 = 3,$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{3j} = 1+2+0+1+1 = 5,$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{4j} = 0+2+2+0+0 = 4$$

e

$$\sum_{j=1}^{5} a_{5j} = 3+0+1+1+0 = 5.$$

Portanto, é fácil ver que a resposta é o banco 1.

2. C

Do enunciado, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 0\cdot 1 & 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. A

Tem-se que

$$A^2 = aA + bI \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Por conseguinte, vem $a \cdot b = 2 \cdot (-1) = -2.$

4. A

Tem-se que

$$\begin{vmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-4)+12=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=0 \text{ ou } t=1.$$

Portanto, como $1>0,$ segue que a resposta é $1.$

5. B

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, temos:

$$0-b+2-0-2b+1=3 \Rightarrow -3b+3=3 \Rightarrow -2b=0 \Rightarrow b=0$$